El principio de contracciones

Semillero SAMAT. El teorema de punto fijo de Banach, por qué importan todas sus hipótesis y algunas aplicaciones a ecuaciones integrales y diferenciales.

Arturo Sanjuán

2026-11-22

Contenido

1. El teorema **2**

2. Ejemplos de juguete: por qué importan todas las hipótesis **2**

3. Algo de intuición: el plano de la ciudad **2**

4. Demostración **3**

5. Dos variantes útiles **3**

6. Una ecuación integral con memoria **4**
6.1. La ecuación de Volterra de segunda especie 5
6.2. Una observación: ecuaciones no locales 5

7. Una ecuación diferencial lineal de segundo orden **6**

8. Funciones de Green y problemas de frontera **6**

9. El teorema de Picard-Lindelöf **7**

10. Ecuaciones de evolución en una dimensión con Fourier **9**
10.1. La ecuación del calor 10
10.2. La ecuación de Schrödinger 11
10.3. Un problema similar: la viga simplemente apoyada 12
10.4. Qué cambia de un caso a otro 13

11. Referencias **13**

Estas son las notas del semillero SAMAT (Semillero en Análisis Matemático) sobre el principio de contracciones. Seguimos la monografía de Brooks y Schmitt, *The Contraction Mapping Principle and Some Applications* (Electronic Journal of Differential Equations, Monograph 09, 2009), y para las ecuaciones de Volterra las ideas del libro de Kesavan, *Functional Analysis* (Hindustan Book Agency, 2009).

Como en las notas de los cursos, el texto lo escribo yo a mano y me ayudo de una IA para pasarlo a esta versión web, pulir la redacción y programar las simulaciones. Los detalles están en la declaración de uso de IA de la página de cursos.

Las simulaciones interactivas que acompañan estas notas están en la versión web.

1. El teorema

! Teorema (principio de contracciones)

Sea $(\mathbb{M}, d)$ un espacio métrico completo y $T : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ una contracción de constante k, es decir,

$$d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y) \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{M}, \quad \text{con } k \in [0, 1).$$

Entonces T tiene un único punto fijo x^*, esto es, $Tx^* = x^*$. Además, si $x_0 \in \mathbb{M}$ es cualquier punto, la iteración

$$x_{n+1} = Tx_n$$

cumple $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, y el error satisface $d(x_n, x^*) \leq \dfrac{k^n}{1-k}\, d(x_0, x_1)$.

El teorema tiene tres hipótesis: que $\mathbb{M}$ sea completo, que T lleve $\mathbb{M}$ en sí mismo y que la constante k sea estrictamente menor que 1. En la nota de raíces y puntos fijos vimos el caso de $\mathbb{R}^n$. Aquí lo hacemos en un espacio métrico completo cualquiera, que es lo que permite aplicarlo a espacios de funciones.

2. Ejemplos de juguete: por qué importan todas las hipótesis

Antes de la demostración, veamos que ninguna de las tres hipótesis sobra.

La condición $k < 1$ es crucial. Si $\mathbb{M} = [0, 1]$ y $Tx = x$, entonces $|Tx - Ty| \leq |x - y|$, pero T tiene infinitos puntos fijos. Aquí $k = 1$ y se pierde la unicidad.

Hace falta que $T(\mathbb{M}) \subset \mathbb{M}$. Tomemos $\mathbb{M} = [2, \infty)$ y $Tx = 1/x$. Por el teorema del valor medio, $|Tx - Ty| \leq |T'(\xi)|\,|x - y|$ con $T'(x) = -x^{-2}$, y como $x \geq 2$ resulta $|T'(\xi)| \leq 1/4$. Así que T es una contracción y $\mathbb{M}$ es un espacio métrico completo. Lo que falla es que $T(\mathbb{M}) = (0, \frac{1}{2}] \not\subset [2, \infty)$ (de hecho son disjuntos), y claramente T no tiene puntos fijos en $\mathbb{M}$.

Hace falta que $\mathbb{M}$ sea completo. Sea $Tx = \sqrt{x}$ en $\mathbb{M} = (1, \infty)$. Es claro que $T(\mathbb{M}) \subset \mathbb{M}$ (de hecho son iguales) y $T'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} < \dfrac{1}{2}$, de donde T es una contracción con $k = 1/2$, pero no tiene ningún punto fijo, porque $\sqrt{x} = x$ solo para $x = 1$, que no está en $\mathbb{M}$. Si en cambio tomamos $\mathbb{M} = [1, \infty)$, que sí es completo, tenemos todas las hipótesis y $x^* = 1$.

3. Algo de intuición: el plano de la ciudad

Antes de continuar, algo de intuición. Si estamos en una ciudad, un plano de la ciudad es una contracción (suponiendo que no es muy grande y que la curvatura de la Tierra se puede despreciar): lleva cada punto de la ciudad a su imagen más pequeña dentro del plano, y el plano está a su vez en la ciudad. El principio de contracciones dice que hay un punto del plano que coincide con el punto de la ciudad que representa.

En el siguiente tablero se puede explorar esta situación para algunas contracciones de regiones del plano: giros y contracciones combinados, y los casos en los que falla una de las hipótesis. Arrastre los puntos A y B para ver que la distancia entre TA y TB es menor que la de A y B, y arrastre o añada órbitas para ver las iteraciones $x_{n+1} = Tx_n$.

Conviene mirar las dos filas de casos. En la primera se cumplen las tres hipótesis y las órbitas llegan a x^* con un error por debajo de la cota del teorema. En la segunda falla una: $\mathbb{M}$ no cerrado (los iterados se acercan a un hueco), $T(\mathbb{M}) \not\subset \mathbb{M}$ (los iterados salen de la región, círculos rojos), $k = 1$ (identidad, rotación pura y traslación) o $k > 1$ (expansión). El último caso es el análogo en el plano de $Tx = \sqrt{x}$ de la sección anterior: $T(x, y) = (\sqrt{x^2 + 1},\, y/2)$ cumple $\|Tu - Tv\| < \|u - v\|$ para $u \neq v$ y, sin embargo, no tiene puntos fijos, porque el supremo del cociente es exactamente 1.

4. Demostración

Demostración

Sea $x_0 \in \mathbb{M}$ arbitrario pero fijo y sea $x_{n+1} = Tx_n$ la iteración de punto fijo.
Paso 1: los pasos se acortan geométricamente. Como T es contracción,

$$d(x_{p+1}, x_p) = d(Tx_p, Tx_{p-1}) \leq k\, d(x_p, x_{p-1}) \leq k^2\, d(x_{p-1}, x_{p-2}) \leq \cdots \leq k^p\, d(x_1, x_0).$$

Paso 2: la sucesión es de Cauchy. Si $n > m$, escribimos $n = m + \ell$ y usamos la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+\ell}) \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_{m+\ell}) \\ &\;\;\vdots \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Sumando las cotas del paso 1,

$$d(x_m, x_n) \leq (k^m + k^{m+1} + \cdots + k^{n-1})\, d(x_0, x_1) = k^m(1 + k + \cdots + k^{n-m-1})\, d(x_0, x_1) \leq \frac{k^m}{1-k}\, d(x_0, x_1),$$

donde usamos que la suma geométrica finita es menor que la serie $\sum_{j \geq 0} k^j = 1/(1-k)$. Como $k^m \to 0$, la sucesión (x_n) es de Cauchy y, por ser $\mathbb{M}$ completo, converge a un punto $x^* \in \mathbb{M}$.
Paso 3: el límite es un punto fijo. Una contracción es continua (es Lipschitz), así que de $x_{n+1} = Tx_n$ obtenemos, haciendo $n \to \infty$, que $x^* = Tx^*$. Es decir, existe un punto fijo.
Paso 4: unicidad. Si y^* es otro punto fijo,

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq k\, d(x^*, y^*),$$

de donde $(1-k)\, d(x^*, y^*) \leq 0$, y como $k \in [0, 1)$, $d(x^*, y^*) = 0$, es decir, $x^* = y^*$.
Cota del error. Fijamos m y hacemos $n \to \infty$ en la desigualdad del paso 2; como $x_n \to x^*$, obtenemos $d(x_m, x^*) \leq \dfrac{k^m}{1-k}\, d(x_0, x_1)$. ■

5. Dos variantes útiles

Corolario (basta que una potencia contraiga)

Si en las hipótesis del teorema solo sabemos que T^m es una contracción para algún $m \geq 1$, la conclusión es la misma: T tiene un único punto fijo.

Demostración

Por el teorema, T^m tiene un único punto fijo z^*, es decir, $T^m z^* = z^*$. Entonces

$$T^m(Tz^*) = T(T^m z^*) = Tz^*,$$

así que Tz^* también es un punto fijo de T^m, y por unicidad $Tz^* = z^*$. Todo punto fijo de T lo es de T^m, de modo que z^* es el único punto fijo de T. ■

En el tablero del plano, el caso *Solo T^3 contrae* es un ejemplo: la matriz de T tiene norma mayor que 1, pero su cubo tiene norma menor que 1, y las órbitas igual convergen.

Teorema (dependencia continua de un parámetro)

Sean (Λ, ρ) y $(\mathbb{M}, d)$ espacios métricos, con $\mathbb{M}$ completo, y sea $T : \Lambda \times \mathbb{M} \to \mathbb{M}$, $(\lambda, x) \mapsto T_\lambda x$, continua en la primera variable y contracción uniforme en la segunda, es decir, con una misma constante $k < 1$ para todo λ. Entonces, para cada $\lambda \in \Lambda$, T_λ tiene un único punto fijo $x^*(\lambda)$, y la aplicación

$$x^* : \Lambda \to \mathbb{M}, \qquad \lambda \mapsto x^*(\lambda)$$

es continua.

Demostración

La existencia y unicidad de $x^*(\lambda)$ es el teorema para cada λ. Solo falta ver que x^* es continua. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Entonces

$$\begin{aligned} d(x^*(\lambda_1), x^*(\lambda_2)) &= d(T_{\lambda_1} x^*(\lambda_1),\, T_{\lambda_2} x^*(\lambda_2)) \\ &\le d(T_{\lambda_1} x^*(\lambda_1),\, T_{\lambda_2} x^*(\lambda_1)) + d(T_{\lambda_2} x^*(\lambda_1),\, T_{\lambda_2} x^*(\lambda_2)) \\ &\le d(T_{\lambda_1} x^*(\lambda_1),\, T_{\lambda_2} x^*(\lambda_1)) + k\, d(x^*(\lambda_1), x^*(\lambda_2)), \end{aligned}$$

de donde

$$d(x^*(\lambda_1), x^*(\lambda_2)) \le (1-k)^{-1}\, d(T_{\lambda_1} x^*(\lambda_1),\, T_{\lambda_2} x^*(\lambda_1)).$$

Fijado λ_1 y dado $\varepsilon > 0$, como $\lambda \mapsto T_\lambda x^*(\lambda_1)$ es continua en λ_1, existe $\delta > 0$ tal que $\rho(\lambda_1, \lambda_2) < \delta$ implica $d(T_{\lambda_1} x^*(\lambda_1), T_{\lambda_2} x^*(\lambda_1)) < \varepsilon(1-k)$. Para esos λ_2 tenemos $d(x^*(\lambda_1), x^*(\lambda_2)) < \varepsilon$, lo que completa la demostración. ■

Veamos ahora algunas aplicaciones a ecuaciones diferenciales e integrales.

6. Una ecuación integral con memoria

Ejemplo 1: una partícula en un fluido viscoelástico

Suponga que se lanza una partícula de masa m con velocidad inicial v_0 en un fluido viscoelástico con memoria (geles, polímeros, soluciones micelares). Su ecuación de movimiento viene dada por

$$v(t) = v_0 - \frac{1}{m}\int_0^t \Gamma(t-s)\, v(s)\, ds = v_0 - \frac{1}{m}(\Gamma * v)(t),$$

con $\Gamma(\tau) = \int_0^\tau \gamma$, donde γ es la memoria del fluido. Por ejemplo, $\gamma(\tau) = \gamma_0 e^{-\tau/\tau_c}$ describe un fluido con un único tiempo de relajación τ_c. Si $\gamma(\tau) \to \gamma\,\delta(\tau)$ (delta de Dirac), entonces Γ se vuelve un escalón de altura γ y se recupera la fricción usual: $v' = -(\gamma/m)\, v$.

Con la memoria exponencial la ecuación integral se puede resolver a mano, y vale la pena hacerlo porque muestra qué hace la memoria. Como $\Gamma(0) = 0$, derivando una vez,

$$v'(t) = -\frac{1}{m}\int_0^t \gamma(t-s)\, v(s)\, ds, \qquad v'(0) = 0.$$

Derivando otra vez, y usando $\gamma' = -\gamma/\tau_c$ junto con la identidad anterior,

$$v''(t) = -\frac{\gamma_0}{m}\, v(t) - \frac{1}{m}\int_0^t \gamma'(t-s)\, v(s)\, ds = -\frac{\gamma_0}{m}\, v(t) - \frac{1}{\tau_c}\, v'(t).$$

Es decir, la ecuación integral es equivalente a la EDO $v'' + v'/\tau_c + (\gamma_0/m)\, v = 0$ con $v(0) = v_0$ y $v'(0) = 0$. Con la variable adimensional $s = t/\tau_c$ y el parámetro $g = \gamma_0 \tau_c^2/m$ queda

$$v'' + v' + g\,v = 0, \qquad v(0) = v_0, \quad v'(0) = 0.$$

Si $g > 1/4$ el fluido tiene suficiente elasticidad (memoria) para que la partícula oscile, y con $\omega = \sqrt{g - 1/4}$,

$$v(s) = v_0\, e^{-s/2} \left[\cos \omega s + \frac{1}{2\omega} \sin \omega s\right].$$

La partícula frena, se detiene, retrocede y se amortigua: el fluido "rebota". Si $g \le 1/4$ los exponentes son reales y no hay oscilación, como en la fricción usual. (Se puede comprobar numéricamente que esta fórmula resuelve la ecuación integral original, por ejemplo con $g = 2$.)

6.1. La ecuación de Volterra de segunda especie

De manera más general podemos considerar la ecuación integral de Volterra de segunda especie: encontrar $u \in C[0,1]$ tal que

$$u(s) = w(s) + \lambda \int_0^s K(s,t)\, u(t)\, dt,$$

donde K es continua en el triángulo $0 \le t \le s \le 1$. En el Ejemplo 1, $K(s,t) = \Gamma(s-t)$, $\lambda = -1/m$, $w(s) \equiv v_0$ y $u = v$. Seguimos las ideas de Kesavan (p. 56, análisis funcional).

Definimos $F : C[0,1] \to C[0,1]$ por $u \mapsto w + \lambda\, T(u)$, con

$$T(u)(s) = \int_0^s K(s,t)\, u(t)\, dt, \qquad K_\infty = \sup |K|.$$

Entonces

$$|F(u_1)(s) - F(u_2)(s)| = |\lambda| \left| \int_0^s K(s,t)\, (u_1(t) - u_2(t))\, dt \right| \le |\lambda|\, K_\infty\, \|u_1 - u_2\| \int_0^s dt = |\lambda|\, K_\infty\, \|u_1 - u_2\|\, s,$$

de donde $\|F(u_1) - F(u_2)\| \le |\lambda| K_\infty \|u_1 - u_2\|$. Esto solo es una contracción si $|\lambda| K_\infty < 1$. Pero si hacemos un paso más,

$$|F^2(u_1)(s) - F^2(u_2)(s)| = \left| \lambda \int_0^s K(s,t)\, (F(u_1)(t) - F(u_2)(t))\, dt \right| \le |\lambda|^2 K_\infty^2\, \|u_1 - u_2\| \int_0^s t\, dt = |\lambda|^2 K_\infty^2\, \frac{s^2}{2}\, \|u_1 - u_2\|,$$

y por inducción,

$$|F^n(u_1)(s) - F^n(u_2)(s)| \le \frac{(|\lambda| K_\infty)^n\, s^n}{n!}\, \|u_1 - u_2\|, \qquad \text{de donde} \qquad \|F^n(u_1) - F^n(u_2)\| \le \frac{(|\lambda| K_\infty)^n}{n!}\, \|u_1 - u_2\|.$$

Esto quiere decir que, por propiedad arquimediana ($a^n/n! \to 0$ para cualquier a), existe un m tal que F^m es una contracción, y por el corolario la ecuación de Volterra tiene una única solución, para todo λ y todo w, sin ninguna condición de pequeñez. Además, para $|\lambda|$ acotado el mismo m sirve, de modo que la versión con parámetro aplicada a F^m muestra que la solución depende continuamente de λ y de w.

6.2. Una observación: ecuaciones no locales

A este tipo de ecuaciones, cuando no se pueden reducir a una EDO, se les llama *no locales*: el valor de $u(s)$ depende de todo el pasado $u|_{[0,s]}$ y no solo de lo que pasa en s. En el Ejemplo 1 sí se pudo reducir, porque el núcleo exponencial se puede eliminar con una variable auxiliar (la derivada v'). Para memorias con decaimiento más lento, como una ley de potencias, no existe tal reducción y la ecuación es genuinamente no local. Un ejemplo de ecuaciones diferenciales no locales se ve en la charla de Peter Bates.

7. Una ecuación diferencial lineal de segundo orden

Una consecuencia de lo anterior es el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales lineales de orden 2 que se ve en los cursos de pregrado.

Ejemplo 2: el problema de valor inicial lineal de segundo orden

Sea $s \in [0,1]$ y $p, q, r \in C[0,1]$. Considere

$$\begin{cases} x''(s) + p(s)\,x'(s) + q(s)\,x(s) = r(s), \\ x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta. \end{cases}$$

Sea $u = x''$. Integrando,

$$x'(s) = \beta + \int_0^s u(t)\,dt,$$

y de nuevo,

$$\begin{aligned} x(s) &= \alpha + \int_0^s x'(t)\,dt = \alpha + \int_0^s \Big(\beta + \int_0^t u(\tau)\,d\tau\Big)dt \\ &= \alpha + \beta s + \int_0^s\int_0^t u(\tau)\,d\tau\,dt = \alpha + \beta s + \int_0^s\int_\tau^s u(\tau)\,dt\,d\tau = \alpha + \beta s + \int_0^s (s-t)\,u(t)\,dt, \end{aligned}$$

donde cambiamos el orden de integración en el triángulo $0 \le \tau \le t \le s$ (en la última igualdad se renombra τ como t). Reemplazando x y x' en la ecuación $u = r - p\,x' - q\,x$ obtenemos una ecuación de Volterra para u:

$$u(s) = w(s) + \int_0^s K(s,t)\,u(t)\,dt,$$

con

$$K(s,t) = -p(s) - q(s)\,(s-t), \qquad w(s) = r(s) - \beta\,p(s) - q(s)\,(\alpha + \beta s), \qquad \lambda = 1.$$

Como K es continuo en el triángulo, la sección anterior da una única u, y por lo tanto una única $x(s) = \alpha + \beta s + \int_0^s (s-t)\,u(t)\,dt$, que es de clase C^2. Además la solución depende continuamente de p, q, r, α y β. Nótese que no se pidió ninguna condición de pequeñez, y que el intervalo $[0,1]$ no es restrictivo (un cambio lineal de variable lo lleva a cualquier intervalo compacto).

8. Funciones de Green y problemas de frontera

Ejemplo 3: un problema de frontera

Suponga que queremos resolver el problema de frontera

$$\begin{cases} -u'' = \varepsilon f(u), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{$*$}$$

Por teoría de funciones de Green, existe una función G tal que $(*)$ tiene solución si y solo si este problema integral la tiene:

$$u(s) = \int_0^1 G(s,t)\,\varepsilon f(u(t))\,dt.$$

En este caso $G(s,t) = s(1-t)$ si $s \le t$ y $G(s,t) = t(1-s)$ si $t \le s$, y $G_\infty = \sup|G| = 1/4$. Esta misma técnica se aplica a cualquier operador lineal de Sturm-Liouville L de cualquier orden con condiciones de frontera autoadjuntas $B(0) = 0$ y $B(1) = 0$, siempre que el problema homogéneo $Lu = 0$ con esas condiciones solo tenga la solución trivial.

Por ejemplo, imagine una viga en voladizo con carga axial variable $N(x)$ y restitución elástica variable $r(x)$:

$$\begin{cases} u'''' - N(x)\,u'' + r(x)\,u = \varepsilon f(u), \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(1) = u'''(1) = 0. \end{cases}$$

Vamos a suponer que $f \in C^1(\mathbb{R})$ y que f' es acotada, y llamamos $f'_\infty = \sup|f'|$. Entonces existe un ε_0 tal que si $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ el problema de valores en la frontera tiene solución. En efecto, definimos

$$F(u)(t) = \int_0^1 G(s,t)\,\varepsilon f(u(s))\,ds,$$

y tenemos que

$$|F(u_1)(t) - F(u_2)(t)| \le G_\infty \int_0^1 |\varepsilon|\,|f(u_1(s)) - f(u_2(s))|\,ds \le G_\infty\,|\varepsilon|\,f'_\infty\,\|u_1 - u_2\|,$$

de donde, si tomamos

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2\,G_\infty f'_\infty},$$

F es una contracción de constante $k \le 1/2$ en $C[0,1]$ y el problema tiene una única solución, que depende continuamente de ε, r y N (por la versión con parámetro). Si además $f(0) = 0$, la función $u \equiv 0$ es solución y, por unicidad, es la única.

Por ejemplo, una viga modelada por

$$\begin{cases} u'''' - N(x)\,u'' + r(x)\,u = \varepsilon\cos(\pi u), \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(1) = u'''(1) = 0 \end{cases}$$

tiene una única solución para ε pequeño (aquí $f'_\infty = \pi$, así que basta $|\varepsilon| \le 1/(2\pi G_\infty)$). Como $f(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$, esa solución no es la trivial.

9. El teorema de Picard-Lindelöf

Ahora sí estamos listos para demostrar el teorema más importante de las ecuaciones diferenciales.

! Teorema (Picard-Lindelöf)

Sea E un espacio de Banach y $f : D \subseteq \mathbb{R} \times E \to E$, donde D es abierto y conexo. Suponga que f es continua y localmente Lipschitz en la segunda variable. Entonces, para cada $(t_0, u_0) \in D$, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u' = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

tiene una única solución, que depende continuamente de u_0, en algún intervalo que contiene a t_0.

Demostración

Aprovechando que D es abierto, sean $a, b > 0$ tales que

$$Q = \{(t,u) \in \mathbb{R} \times E : \ |t - t_0| \le a, \ \|u - u_0\| \le b\} \subseteq D.$$

Q es cerrado y acotado, y por hipótesis (tomando a, b pequeños) f tiene en Q una constante de Lipschitz L en la segunda variable. Sean además

$$m = \sup_Q \|f(t,u)\|, \qquad \alpha = \min\Big\{a, \frac{b}{m}\Big\}.$$

El supremo m es finito. Como E puede tener dimensión infinita, cerrado y acotado no implica compacto, y no podemos acotar f por compacidad de Q. Pero basta usar la continuidad en t y la condición de Lipschitz:

$$\|f(t,u)\| \le \|f(t,u_0)\| + \|f(t,u) - f(t,u_0)\| \le \max_{|t-t_0|\le a} \|f(t,u_0)\| + L\,\|u - u_0\| \le \max_{|t-t_0|\le a} \|f(t,u_0)\| + L\,b < \infty,$$

y el máximo existe porque $t \mapsto f(t,u_0)$ es continua sobre el compacto $|t - t_0| \le a$.
El espacio. Sea $\tilde{L} > L$ cualquier constante, $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ y

$$\mathbb{M} = \{u \in C(I,E) : \ u(t) \in \overline{B}_b(u_0) \text{ para todo } t \in I\}.$$

En $\mathbb{M}$ definimos la norma ponderada

$$\|u\|_{\mathbb{M}} = \max_{|t-t_0|\le\alpha} \Big(e^{-\tilde{L}|t-t_0|}\,\|u(t)\|\Big).$$

Esta norma es equivalente a la norma del máximo, así que $\mathbb{M}$, que es cerrado, con esta métrica es un espacio métrico completo. Definimos el operador

$$Tu(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\,ds. \qquad (\star)$$

Resolver $(\star)$ es lo mismo que resolver el problema de valor inicial.
$T(\mathbb{M}) \subseteq \mathbb{M}$**.** En efecto,

$$\|Tu(t) - u_0\| \le \left|\int_{t_0}^{t} \|f(s,u(s))\|\,ds\right| \le \alpha\, m \le b,$$

es decir, $Tu(t) \in \overline{B}_b(u_0)$ para todo $t \in I$.
T **es una contracción.** Para $t \ge t_0$ (el caso $t \le t_0$ es igual),

$$\|(Tu)(t) - (Tv)(t)\| \le \int_{t_0}^{t} \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|\,ds \le L\int_{t_0}^{t} \|u(s) - v(s)\|\,ds,$$

y por lo tanto

$$e^{-\tilde{L}|t-t_0|}\,\|Tu(t) - Tv(t)\| \le L\,e^{-\tilde{L}|t-t_0|}\int_{t_0}^{t} \|u(s) - v(s)\|\,ds.$$

Aquí está el paso de la norma ponderada. Escribimos $\|u(s) - v(s)\| = e^{\tilde{L}|s-t_0|}\,e^{-\tilde{L}|s-t_0|}\,\|u(s) - v(s)\| \le e^{\tilde{L}|s-t_0|}\,\|u - v\|_{\mathbb{M}}$, y entonces

$$\int_{t_0}^{t} \|u(s) - v(s)\|\,ds \le \frac{e^{\tilde{L}|t-t_0|} - 1}{\tilde{L}}\,\|u - v\|_{\mathbb{M}} \le \frac{e^{\tilde{L}|t-t_0|}}{\tilde{L}}\,\|u - v\|_{\mathbb{M}}.$$

Reemplazando,

$$e^{-\tilde{L}|t-t_0|}\,\|Tu(t) - Tv(t)\| \le \frac{L}{\tilde{L}}\,\|u - v\|_{\mathbb{M}}, \qquad \text{de donde} \qquad \|Tu - Tv\|_{\mathbb{M}} \le \frac{L}{\tilde{L}}\,\|u - v\|_{\mathbb{M}},$$

y $L/\tilde{L} < 1$. Por el principio de contracciones, T tiene un único punto fijo en $\mathbb{M}$.
Dependencia continua del dato inicial. Repetimos la construcción con $\alpha' = \min\{a, b/(2m)\}$, $I' = [t_0 - \alpha', t_0 + \alpha']$, el mismo espacio $\mathbb{M}$ (con I' en lugar de I) y datos iniciales $u_1 \in \Lambda := B_{b/2}(u_0)$, con el operador $T_{u_1}u(t) = u_1 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$. Ahora $\|T_{u_1}u(t) - u_0\| \le \|u_1 - u_0\| + \alpha' m < b/2 + b/2 = b$, así que T_{u_1} lleva $\mathbb{M}$ en $\mathbb{M}$, es una contracción uniforme de constante $L/\tilde{L}$, y como $\|T_{u_1}u - T_{u_2}u\|_{\mathbb{M}} \le \|u_1 - u_2\|$ es continua en u_1. La versión con parámetro da que el punto fijo, es decir, la solución, es continua en el dato inicial. ■

La norma ponderada hace que el intervalo de existencia sea $\alpha = \min\{a, b/m\}$ y no dependa de la constante de Lipschitz L: con la norma del máximo habría que pedir además $\alpha L < 1$. En el siguiente tablero se ve la diferencia.

Una consecuencia inmediata es que cualquier ecuación o sistema lineal $x' = A(t)\,x + g(t)$ con coeficientes continuos tiene una única solución en todo el intervalo donde están definidos los coeficientes. Allí f es Lipschitz globalmente en x (con $L = \max \|A(t)\|$ sobre cada intervalo compacto), T lleva todo $C(I, E)$ en sí mismo y la misma cuenta de la norma ponderada da que es una contracción, sin necesidad de la bola $\overline{B}_b(u_0)$, así que α puede ser todo el intervalo.

i Ejemplo 4: modelos clásicos

Los siguientes sistemas tienen un campo f polinomial o racional, de clase C^1 y por lo tanto localmente Lipschitz. El teorema da una única solución para cada dato inicial.
Lotka-Volterra (depredador y presa), con $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$:

$$x' = \alpha x - \beta xy, \qquad y' = \delta xy - \gamma y.$$

Modelo SIR (epidemias), con $N = S + I + R$:

$$S' = -\beta \frac{SI}{N}, \qquad I' = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I, \qquad R' = \gamma I.$$

Lorenz:

$$x' = \sigma(y - x), \qquad y' = x(\rho - z) - y, \qquad z' = xy - \beta z.$$

Van der Pol:

$$x' = y, \qquad y' = \mu(1 - x^2)\, y - x.$$

El siguiente tablero permite explorar estos cuatro ejemplos con distintos datos iniciales y parámetros. Para cada uno calcula, sobre la bola cerrada $\overline{B}_R(x_0)$, las constantes $m = \sup \|f\|$ y $L = \sup \|Df\|$, el tiempo garantizado $T_{PL} = R/m$ del teorema, y lo compara con el momento en que la solución numérica realmente sale de la bola. Aun cuando las soluciones sean globales, el teorema solo garantiza un intervalo corto, que depende de los datos y del tamaño del campo.

(Tablero interactivo disponible solo en la versión web.)

10. Ecuaciones de evolución en una dimensión con Fourier

Las mismas ideas funcionan para ecuaciones en derivadas parciales de evolución, donde la incógnita es una función del tiempo con valores en un espacio de funciones de x. Veamos tres casos en una dimensión espacial sobre el intervalo $(0, \pi)$ con condiciones de Dirichlet homogéneas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$: el calor, Schrödinger y un problema similar, una viga. En los tres la solución se escribe con la fórmula de Duhamel, y lo que cambia es en qué espacio de Banach el operador de la parte lineal tiene norma controlada.

Serie de Fourier de medio rango. Una función u en $(0, \pi)$ con $u(0) = u(\pi) = 0$ se extiende de forma impar a $(-\pi, \pi)$ y periódica, y se desarrolla en serie de senos:

$$u(x) = \sum_{k \ge 1} u_k \sin kx, \qquad u_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin kx\, dx.$$

Las funciones $\sin kx$ son autofunciones de $-\partial_x^2$ con autovalor k^2 y condiciones de Dirichlet, así que u_{xx} corresponde a $-k^2 u_k$. Con estos coeficientes vale Parseval,

$$\|u\|_{L^2}^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{k\geq 1}|u_k|^2, \qquad \|u\|_{H_0^1}^2 := \|u_x\|_{L^2}^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{k\geq 1} k^2|u_k|^2,$$

donde $H_0^1(0,\pi)$ son las funciones con derivada en L^2 y valores nulos en los extremos. Como $k \geq 1$, $\|w\|_{L^2} \leq \|w\|_{H_0^1}$. Además, por Cauchy-Schwarz con $\sum k^{-2} = \pi^2/6$,

$$\|u\|_\infty \leq \sum |u_k| \leq \Big(\sum k^{-2}\Big)^{1/2}\Big(\sum k^2|u_k|^2\Big)^{1/2} = C_\infty \|u\|_{H_0^1}, \qquad C_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{6}} = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \approx 1{,}02. \quad (\dagger)$$

Esta desigualdad es lo que permite que una función no lineal $f(u)$ sea localmente Lipschitz en H_0^1: en una dimensión, tener energía finita acota u en valor absoluto.

10.1. La ecuación del calor

Problema

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ localmente Lipschitz y $u_0 \in H_0^1(0,\pi)$. Resuelva

$$u_t = u_{xx} + f(u), \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,\pi).$$

La parte lineal. Si $f = 0$, cada coeficiente cumple $u_k' = -k^2 u_k$, de donde $u_k(t) = e^{-k^2 t}u_{0,k}$. Es decir,

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} e^{-k^2 t}\, u_{0,k}\sin kx = \int_0^\pi G_t(x,y)\, u_0(y)\, dy, \qquad G_t(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 1} e^{-k^2 t}\sin kx\, \sin ky.$$

Llamamos $S(t)u_0$ a esta función. Como $0 < e^{-k^2 t} \leq 1$, por Parseval $S(t)$ no aumenta ni la norma L^2 ni la norma H_0^1:

$$\|S(t)v\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^2}, \qquad \|S(t)v\|_{H_0^1} \leq \|v\|_{H_0^1}.$$

La parte no lineal (Duhamel). Con $f(u) = \sum f_k(t)\sin kx$, $f_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(u)\sin kx\, dx$, cada coeficiente cumple $u_k' + k^2 u_k = f_k$. Multiplicando por $e^{k^2 t}$ queda $\left(e^{k^2 t}u_k\right)' = e^{k^2 t} f_k$, e integrando,

$$u_k(t) = e^{-k^2 t}u_{0,k} + \int_0^t e^{-k^2(t-s)} f_k(s)\, ds, \qquad \text{es decir,} \qquad u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\, f(u(s))\, ds.$$

Resolver el problema es hallar un punto fijo del operador $\Phi(u)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\, f(u(s))\, ds$.

La ganancia de una derivada. Para el término integral $D(t) = \int_0^t S(t-s)g(s)\, ds$, con g en L^2, por Cauchy-Schwarz en s y $\int_0^t e^{-k^2(t-s)}ds \leq 1/k^2$,

$$k^2\Big(\int_0^t e^{-k^2(t-s)}|g_k(s)|\, ds\Big)^2 \leq k^2\cdot\frac{1}{k^2}\int_0^t e^{-k^2(t-s)}|g_k(s)|^2\, ds \leq \int_0^t |g_k(s)|^2\, ds.$$

Sumando en k (con el factor $\pi/2$),

$$\|D(t)\|_{H_0^1}^2 \leq \int_0^t \|g(s)\|_{L^2}^2\, ds \leq t\sup_{s\leq t}\|g(s)\|_{L^2}^2. \quad (\ddagger)$$

Es decir, una función en L^2 entra y sale una derivada mejor, en H^1_0, con un costo $\sqrt{t}$. Esto es lo que se usa para cerrar el argumento con f arbitraria, que solo lleva H^1_0 en L^2.

El espacio y las constantes. Sea $X_\tau = C([0,\tau]; H^1_0(0,\pi))$ con $\|u\|_X = \max_{t\le\tau}\|u(t)\|_{H^1_0}$. Sea $\rho = \|u_0\|_{H^1_0} + 1$, $R = C_\infty \rho$ y

$$M_R = \max_{|x|\le R} |f(x)|, \qquad L_R = \text{constante de Lipschitz de } f \text{ en } [-R,R].$$

Si $\|u\|_X \le \rho$, por (†) se tiene $|u| \le R$, y entonces

$$\|f(u)\|_{L^2} \le \sqrt{\pi}\, M_R, \qquad \|f(u) - f(v)\|_{L^2} \le L_R \,\|u - v\|_{L^2} \le L_R \,\|u - v\|_{H^1_0}.$$

Por (‡),

$$\|\Phi(u)\|_X \le \|u_0\|_{H^1_0} + \sqrt{\tau}\sqrt{\pi}\, M_R \le \rho \quad \text{si } \tau \le \frac{1}{\pi M_R^2}, \qquad \|\Phi(u)-\Phi(v)\|_X \le \sqrt{\tau} L_R \,\|u-v\|_X \le \tfrac{1}{2}\|u-v\|_X \quad \text{si } \tau \le \frac{1}{4L_R^2}.$$

Con $\tau = \min\{1/(\pi M_R^2),\, 1/(4L_R^2)\}$, Φ es una contracción de la bola cerrada de radio ρ de X_τ en sí misma, y hay una única solución en $[0,\tau]$. Es la estructura de Picard-Lindelöf, con la diferencia de que el tiempo entra como $\sqrt{\tau}$ por la ganancia de derivada. La continuidad en t de $S(t)u_0$ con valores en H^1_0 viene de convergencia dominada en la serie.

10.2. La ecuación de Schrödinger

> **Problema**
>
> Sea $u_0 \in H^1_0(0,\pi)$ con valores complejos. Resuelva la ecuación de Schrödinger no lineal cúbica
>
> $$iu_t + u_{xx} = F(u), \quad F(u) = |u|^2 u, \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x).$$

La parte lineal. Si $F = 0$, cada coeficiente cumple $iu_k' = k^2 u_k$, es decir, $u_k' = -ik^2 u_k$, de donde $u_k(t) = e^{-ik^2 t} u_{0,k}$. Es el mismo cálculo del calor con k^2 reemplazado por ik^2:

$$S(t)u_0 = \sum_{k\ge1} e^{-ik^2 t}\, u_{0,k} \sin kx.$$

Por qué falla el argumento del calor. Ahora $|e^{-ik^2 t}| = 1$: no hay decaimiento, y por lo tanto no hay ganancia de derivada. El núcleo $\frac{2}{\pi}\sum e^{-ik^2 t} \sin kx \sin ky$ no es una función sino una serie que no converge absolutamente, y no sirve para acotar en L^∞. Lo que sí hay es conservación de normas. Por Parseval,

$$\|S(t)v\|_{L^2} = \|v\|_{L^2}, \qquad \|S(t)v\|_{H^1_0} = \|v\|_{H^1_0},$$

es decir, $S(t)$ es unitario en L^2 y es una isometría en H^1_0. Por eso el espacio de trabajo tiene que ser H^1_0 y no L^2, y no hay $\sqrt{\tau}$ gratis.

Duhamel. De $iu_k' = k^2 u_k + F_k$ se obtiene $u_k(t) = e^{-ik^2 t} u_{0,k} - i\int_0^t e^{-ik^2(t-s)} F_k(s)\, ds$, es decir,

$$u(t) = S(t)u_0 - i\int_0^t S(t-s)\, F(u(s))\, ds =: \Phi(u)(t).$$

Las constantes. Usamos $X_\tau = C([0,\tau]; H^1_0(0,\pi))$. Para tres funciones $a, b, c \in H^1_0$ (reales o complejas, o sus conjugadas), el producto abc se anula en los extremos y $(abc)_x = a_x bc + ab_x c + abc_x$, de modo que por (†)

$$\|abc\|_{H^1_0} \le 3\,C_\infty^2\,\|a\|_{H^1_0}\|b\|_{H^1_0}\|c\|_{H^1_0} = \pi\,\|a\|_{H^1_0}\|b\|_{H^1_0}\|c\|_{H^1_0}.$$

Aplicado a $F(u) = u\,u\,\bar u$ da $\|F(u)\|_{H^1_0} \le \pi\|u\|^3_{H^1_0}$. Para la diferencia usamos la identidad $F(u) - F(v) = (u-v)\,u\bar u + v\,(u-v)\,\bar u + v\,v\,\overline{(u-v)}$, y obtenemos

$$\|F(u) - F(v)\|_{H^1_0} \le \pi(\|u\|^2 + \|u\|\|v\| + \|v\|^2)\,\|u-v\|_{H^1_0} \le 3\pi\rho^2\,\|u-v\|_{H^1_0} \quad \text{si } \|u\|, \|v\| \le \rho.$$

Tomemos $\rho = 2\|u_0\|_{H^1_0}$ y la bola $\|u\|_X \le \rho$. Como $S(t)$ es isometría, no hay costo de tiempo más que el integral:

$$\|\Phi(u)\|_X \le \|u_0\|_{H^1_0} + \tau\pi\rho^3 \le \rho \quad \text{si } \tau \le \frac{1}{2\pi\rho^2}, \qquad \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_X \le 3\pi\rho^2\,\tau\|u-v\|_X \le \tfrac12\|u-v\|_X \quad \text{si } \tau \le \frac{1}{6\pi\rho^2}.$$

Con $\tau = 1/(6\pi\rho^2) = 1/(24\pi\|u_0\|^2_{H^1_0})$, Φ es una contracción y la ecuación tiene una única solución local en H^1_0. El tiempo garantizado es del orden de $1/\|u_0\|^2_{H^1_0}$: cuanto mayor el dato, menor el intervalo, el mismo fenómeno R/m del tablero anterior con $m \sim R^3$. Compárese con el calor, donde el tiempo entra como $\sqrt{\tau}$: allí el integral de Duhamel gana una derivada, aquí no.

10.3. Un problema similar: la viga simplemente apoyada

Problema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz. Resuelva la ecuación de una viga simplemente apoyada con carga no lineal,

$$u_{tt} + u_{xxxx} = f(u), \qquad x \in (0,\pi), \quad u(0,t) = u(\pi,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0,$$

con datos $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = u_1(x)$.

Es la misma serie de senos de las secciones anteriores. Las funciones $\sin kx$ son además autofunciones de ∂_x^4 con autovalor k^4, y las condiciones $u = u_{xx} = 0$ en los extremos son las de una viga simplemente apoyada. Escribimos

$$u(x,t) = \sum_{k\ge1} u_k(t)\sin kx, \qquad f(u) = \sum_{k\ge1} f_k(t)\sin kx, \quad f_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(u)\sin kx\,dx.$$

Cada coeficiente cumple $u_k'' + k^4 u_k = f_k(t)$, y por variación de constantes,

$$u_k(t) = u_{0,k}\cos(k^2t) + u_{1,k}\,\frac{\sin(k^2t)}{k^2} + \int_0^t \frac{\sin\,(k^2(t-s))}{k^2}\,f_k(s)\,ds.$$

Aquí el multiplicador de la parte lineal ya no es e^{-tk^2} (calor) ni e^{-itk^2} (Schrödinger), sino el par $\cos(k^2t)$, $\sin(k^2t)/k^2$: la frecuencia es k^2. Además, el núcleo del forzamiento $\sin(k^2(t-s))/k^2$ está acotado por $1/k^2$, de modo que el forzamiento *gana dos derivadas* en x.

El espacio. Normas con los coeficientes: $\|u\|^2_{L^2} = \frac{\pi}{2}\sum|u_k|^2$ y $\|u\|^2_V = \frac{\pi}{2}\sum k^4|u_k|^2$ (el espacio $V = H^2 \cap H^1_0$ de las condiciones de frontera). Sea $H = V \times L^2(0,\pi)$ con $\|(u,v)\|^2_H = \|u\|^2_V + \|v\|^2_{L^2}$. En las variables $U = (u, u_t)$ el flujo lineal rota cada par (k^2u_k, u_k') un ángulo k^2t, así que es una isometría de H (conserva la energía), y la fórmula de arriba se lee

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)\,(0, f(u(s)))\,ds =: \Phi(U)(t), \qquad \|S(t)\| = 1.$$

Necesitamos dos desigualdades. Como $k \ge 1$, $\|w\|_{L^2} \le \|w\|_V$. Y por Cauchy-Schwarz con $\sum k^{-4} = \pi^4/90$,

$$\|u\|_\infty \le \sum |u_k| \le \Big(\sum k^{-4}\Big)^{1/2}\Big(\sum k^4|u_k|^2\Big)^{1/2} = C_V\|u\|_V, \qquad C_V = \sqrt{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^4}{90}} = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{45}} \approx 0{,}83.$$

Las constantes. Sea $\rho_0 = \|U_0\|_H$, $\rho = \rho_0 + 1$, $R = C_V\rho$, y M_R, L_R como antes. En la bola $\|U\|_X \le \rho$ de $X_\tau = C([0,\tau]; H)$ tenemos $|u| \le R$ y por lo tanto

$$\|(0, f(u))\|_H = \|f(u)\|_{L^2} \le \sqrt{\pi}\, M_R, \qquad \|f(u) - f(w)\|_{L^2} \le L_R\|u - w\|_{L^2} \le L_R\,\|U - W\|_H.$$

Entonces $\|\Phi(U)\|_X \le \rho_0 + \tau\sqrt{\pi}\, M_R \le \rho$ si $\tau\sqrt{\pi}M_R \le 1$, y $\|\Phi(U) - \Phi(W)\|_X \le \tau L_R\|U - W\|_X \le \frac{1}{2}\|U - W\|_X$ si $\tau L_R \le \frac{1}{2}$. Con $\tau = \min\{1/(\sqrt{\pi}M_R),\, 1/(2L_R)\}$ hay una única solución local para cualquier f localmente Lipschitz.

Extensión global. Si además $|f(x)| \le A + B|x|$, entonces $\|f(u)\|_{L^2} \le A\sqrt{\pi} + B\|u\|_{L^2} \le A\sqrt{\pi} + B\|U\|_H$, y de la fórmula de Duhamel y de $\|S\| = 1$,

$$\|U(t)\|_H \le \|U_0\|_H + \int_0^t (A\sqrt{\pi} + B\|U(s)\|_H)\, ds \qquad \Longrightarrow \qquad \|U(t)\|_H \le (\|U_0\|_H + A\sqrt{\pi}\, t)\, e^{Bt}$$

por el lema de Gronwall. La norma no puede explotar en tiempo finito, y como el tiempo de existencia local solo depende de $\|U(t)\|_H$, la solución se extiende a todo $t \ge 0$.

10.4. Qué cambia de un caso a otro

Ecuación	Multiplicador de la parte lineal	Dónde está controlada	Qué se usa
Calor	e^{-tk^2}	L^2 y H^1_0	decaimiento: ganancia de una derivada, $\sqrt{\tau}$
Schrödinger	e^{-itk^2}	L^2 y H^1_0 (isometría)	unitariedad y $H^1_0 \subset L^\infty$
Viga	$\cos(k^2t)$, $\sin(k^2t)/k^2$	energía $V \times L^2$	isometría y ganancia de dos derivadas

En los tres casos, el principio de contracciones hace el trabajo y la elección del espacio de Banach decide si funciona.

11. Referencias

- R. M. Brooks y K. Schmitt, *The Contraction Mapping Principle and Some Applications*, Electronic Journal of Differential Equations, Monograph 09, 2009. Texto completo.
- S. Kesavan, *Functional Analysis*, Texts and Readings in Mathematics 52, Hindustan Book Agency, 2009. Springer.
- Charla de Peter Bates sobre ecuaciones diferenciales no locales. Video.
- Declaración de uso de IA: página de cursos.